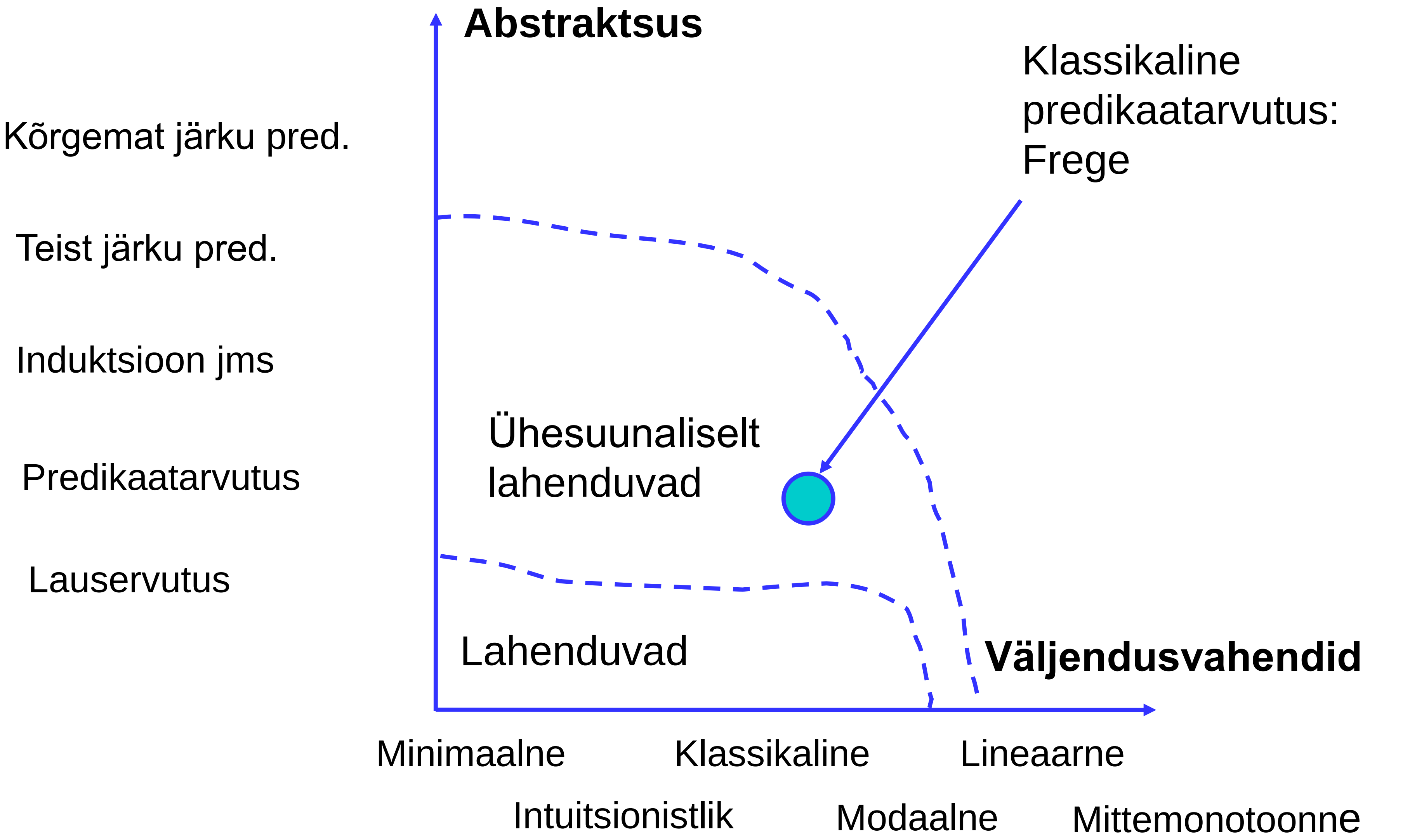
Mitteklassikalised loogikad: sissejuhatus

Palju erinevaid loogikaid



Hierarhia ja kõrgemat järku loogikad

- **Lausearvutus**: kvantoreid / muutujaid ei ole. Iga atomaarne omadus on mõeldud olema kas õige või vale. Näiteks **(a & b) -> a**
- **Predikaatarvutus**: kvantorid / muutujad, mida saab asendada „asjade“ tähistajatega, mille vahel on seosed / predikaadid. Näiteks **Iga X, Y (vend(X,Y) -> vend(Y.X)).**
- **Teist järku predikaatarvutus**: muutujad saavad tähistada predikaate / hulki. Näiteks **Iga P,X (P(X) v -P(X))** kus P on predikaat / hulk. Pane tähele, et predikaate / hulki on lõpmatult palju.
- **Kolmandat järku predikaatarvutus:** muutujad saavad tähistada hulkade hulki.
- **.....**
- **Kõrgemat järku loogika HOL:** muutujad saavad tähistada mistahes hulgastruktuuri eelnevast hiearhiast. Siin ei ole enam võimalik teha korrektset ja täielikku järeldusreeglite kogust ja ei ole ka enam „normaalset“ semantikat ehk mudelite teooriat.

Sõnad ja laused ja tähendus

- Lause tähendus sõltub järgmistest asjadest:
    - **Lauses olevate sõnade tähendus**
    - **Ütlemise aeg ja koht**
    - **Lause ütleja teadmised**
    - **Lause ütleja teadmised kuulaja teadmiste kohta**
    - **Ühiskonna teadmised (spetsialistid) jne**
    - **Ütleja eesmärgid**
    - **jne jne**
- Selge, et selliste sõnade nagu “koer”, “kuningas”, “mõtlemine”, “rõõm”, “punane” jne tähendus on mittetriviaalne ja sõltub kontekstist jne:
    - **Ameerika president on Donald Trump.**
    - **Prantsusmaa kuningas on rikas.**

Elementaarsed sõnad, struktuur ja tähendus

- Sünteetilised laused ütlevad midagi olukorra kohta.
- Analüütilised laused on tõesed oma struktuuri tõttu:
  - Kui Jaan on elus ja sööb kala, siis ta sööb kala: **(A & B) => B**
  - Kui Jaan on elus ja sööb kala, siis ta on elus: **(A & B) => A**
- Need analüütilised laused eeldavad, et meil on midagi kindlalt teada sõnade “Poissmees”, “kaks”, “pluss”, “neli” kohta:
  - Poissmees ei ole abielus: **Teadmised => (Iga x . P(x) => - A(x))**
  - Kui keegi on poissmees, siis ta on mees:
    Teadmised => (Iga x . P(x) => M(x))
  - Kaks pluss kaks on neli : **Teadmised => (2 + 2 = 4)**

“Elementaarsed” sõnad?

- **Esiteks: uurime “elementaarsete” sõnade tähendust:**
  - ja, või, järeldub, eksisteerib, iga, ...

  - **(A & B) => B**
  - **Teadmised => (Iga x . P(x) => - A(x))**
  - **...**

  - **Mida need “&” ehk “ja” jne ikkagi tähendavad?**
  - **Kas nende tähendus sõltub ka kontekstist?**
  - **Mis variante nende tähenduse jaoks üldse on?**

- **Teiseks: kas on veel olulisi “elementaarseid” sõnu?**

Mitteklassikalised loogikad räägivad elementaarsõnadest

- **Selgub, et “elementaarsed” sõnad polegi nii elementaarsed!**
  - neil on mitmeid võimalikke tähendusi
  - on veelgi elementaarsemaid “varjatud” sõnu sõnade “ja”, “või” sees!
  - elementaarseid sõnu on rohkem, kui algul paistab

- **Kolm põhiharu mitteklassikalistes loogikates, mida saab kombineerida:**
  - harilike elementaarsõnade teised tähendused:
    - piiratud variandid
    - laiendatud variandid
  - nn substrukturaalsed loogikad, kus “ja”, “või” jne lammutatakse tükkideks
  - sõnad/fraasid “võimatu”, “on võimalik”, “teab” jne

Mis on “klassikaline” loogika?

- **Loogikatehted on funktsioonid tõeväärtustel T ja V.**
- Loogikatehted kui funktsioonid on defineeritud tabelitega:

A	**&**	B
T	**T**	T
T	**V**	V
V	**V**	T
V	**V**	V

A	**V**	B
T	**T**	T
T	**T**	V
V	**T**	T
V	**V**	V

-	A
V	T
T	V

A	**=>**	B
T	**T**	T
T	**V**	V
V	**T**	T
V	**T**	V

- **Kvantorid on “lühendid” lõpmatu arvu “või” ja “ja” jaoks:**
  - Eksisteerib selline x, et P(x): P(0) v P(1) v P(2) v .....
  - Kõigi x-de jaoks P(x): P(0) & P(1) & P(2) & ....

Mis on “klassikaline” loogika?

- Eeldame, et meil on olemas mingid **"asjad",** mille omadusi kirjeldame. Kirjeldatavate "asjade" hulka nimetatakse **domeen**iks. Eeldame, et domeen ei ole tühi (st midagi on ikka olemas).

- **Predikaadid** on funktsioonid asjadest ja asjade listidest tõeväärtustele, mida saab defineerida tabeliga a la
  P(1)=F, P(2)=T, P(a)=F, ... R(1,a)=T, R(1,b)=F, ...

- **Funktsioonid** on funktsioonid asjadest ja asjade listidest asjadele, mida mida saab defineerida tabeliga a la
  f(1)=1, f(2)=3, f(a)=1, ... g(a,1)=2, g(a,b)=b, ...

- Mingi valemi F **mudeliks** nimetatakse kolmikut <D, PT, FT> kus D on mingi domeen, PT on mingi predikaate defineeriv tabel ja FT on mingi funktsioone defineeriv tabel kõigi D elementide ja F-s olevate predikaatide ja funktsioonide jaoks.

Mis on “klassikaline” loogika?

- Mingi valemi F **mudeliks** nimetatakse kolmikut <D, PT, FT> kus D on mingi domeen, PT on mingi predikaate defineeriv tabel ja FT on mingi funktsioone defineeriv tabel kõigi D elementide ja F-s olevate predikaatide ja funktsioonide jaoks.

- Valem F on vastuoluline, kui tal ei ole ühtegi mudelit.
- Valem F on kooskõlaline, kui tal on vähemalt üks mudel.
- Valem F on tautoloogiline, kui talle sobib iga mudel.

Mis on “klassikaline” loogika?

Näited:

- D = {0} PT= {P(0)=T} sobib All x . P(x) v -P(x)
- D = {0} PT= {P(0)=T} ei sobi All x . -P(x)
- D = {0} PT= {P(0)=T} sobib All x . P(x)
- D = {0} PT= {P(0)=T} ei sobi E x E y. P(x) & -P(y)
- D = {0,1} PT= {P(0)=F, P(1)=T} sobib E x E y. P(x) & -P(y)

Mis on “klassikaline” loogika?

Ei sobi domeen, kus on rohkem kui üks element:

- All x,y [x=y].

Sobivad ainult kahe-elemendilised domeenid:

- All x [-(a=b) & (x=a v x=b)]

Ei sobi ükski lõplik domeen (loe R-i kui „on väiksem“):

- All x,y,z [R(x,y) & R(y,z) => R(x,z)] &
  All x,y [R(x,y) => -R(y,x)] &
  All x Exists y [R(x,y)].

Mis on “klassikaline” loogika?

- Tõestuste teooria ehk proof theory: ei tegele mitte mudelitega, vaid reeglitega ja järeldustega.

- Põhiviisid alus-reeglisüsteemi esitamiseks loogikas (ja, või, järeldub jne tähenduste defineerimiseks):

  - **Hilberti stiilis**: palju aksioome ja vähe reegleid (peam modus ponens)
  - **Naturaalarvutus**: aksioomiks tautoloogia, palju reegleid, järeldused moodustatakse puukujuliselt
  - **Sekventsarvutus**: sarnane naturaalarvutusega, kuid järeldusahel on üks lineaarselt kirjapandav objekt

Hilberti aksiomaatika lausearvutuse jaoks

- Axioms of Hilbert system $\mathcal{H}$
  1. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  2. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  3. $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Rules of inference
  - $\dfrac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$ (Modus Ponens)
  - $\dfrac{U \cup \{A\} \vdash B}{U \vdash A \rightarrow B}$ (deduction rule, can be proved by induction)

Gentzeni sekventsiaalarvutus: tehete reeglid

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, B \vdash \Delta, A \wedge B}\ (\vdash \wedge_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{B, \Gamma \vdash \Delta, B \wedge A}\ (\vdash \wedge_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta, B}\ (\vee \vdash_1) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, B \vee A \vdash B, \Delta}\ (\vee \vdash_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, A \vdash \Delta}\ (\rightarrow\vdash_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta, B}\ (\rightarrow\vdash_2) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}\ (\vdash\rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\vdash \neg)$$

Gentzeni sekventsiaalarvutus: strukturaalreeglid

$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$ (Axiom)	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$ (Cut)
$\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}$ (Commut $\vdash$)	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}$ ($\vdash$ Commut)
$\dfrac{\Gamma_1, A, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}$ (Contract $\vdash$)	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, A, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, A, \Delta_2}$ ($\vdash$ Contract)

Gentzeni sekventsiaalarvutus: näitetõestus

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$(\neg R)$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, A$}
\RightLabel{(PR)}
\UnaryInfC{$\vdash A, \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$C \vdash C$}
\RightLabel{$(\vee L)$}
\BinaryInfC{$B \vee C \vdash B, C$}
\RightLabel{(PR)}
\UnaryInfC{$B \vee C \vdash C, B$}
\RightLabel{$(\neg L)$}
\UnaryInfC{$B \vee C, \neg C \vdash B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$\neg A \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\rightarrow L)$}
\BinaryInfC{$(B \vee C), \neg C, (B \rightarrow \neg A) \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\wedge L_1)$}
\UnaryInfC{$(B \vee C), \neg C, ((B \rightarrow \neg A) \wedge \neg C) \vdash \neg A$}
\RightLabel{(PL)}
\UnaryInfC{$(B \vee C), ((B \rightarrow \neg A) \wedge \neg C), \neg C \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\wedge L_2)$}
\UnaryInfC{$(B \vee C), ((B \rightarrow \neg A) \wedge \neg C), ((B \rightarrow \neg A) \wedge \neg C) \vdash \neg A$}
\RightLabel{(CL)}
\UnaryInfC{$(B \vee C), ((B \rightarrow \neg A) \wedge \neg C) \vdash \neg A$}
\RightLabel{(PL)}
\UnaryInfC{$((B \rightarrow \neg A) \wedge \neg C), (B \vee C) \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\rightarrow L)$}
\BinaryInfC{$((B \rightarrow \neg A) \wedge \neg C), (A \rightarrow (B \vee C)) \vdash \neg A, \neg A$}
\end{prooftree}
$$

Model theory and proof theory

- Kaks täiesti erinevat asja:
  - **Mudelite teooria** uurib mudeleid, nende omadusi ja klappimist valemitega (semantika).
  - **Tõestuste teooria** uurib järeldusreegleid ja järelduspuid ning nende omadusi.
- Järeldusreeglite süsteem on **korrektne,** ku**i**: kui valem A on järeldusreeglite abil tuletatav, siis talle klapib iga mudel.
- Järeldusreeglite süsteem on **täielik**, kui: kui valemile B klapib iga mudel, siis see valem on järeldusreeglite abil tuletatav.
- Gödeli teoreem täielikkusest (1929, PhD): esimest järku loogika harilikud reeglite süsteemid on täielikud.

Gödeli mittetäielikkuse-teoreemid

- Kaks mittetäielikkuse teoreemi:

  - No consistent system of axioms whose theorems can be listed by an "effective procedure" (essentially, a computer program) is capable of proving all facts about the natural numbers. For any such system, there will always be statements about the natural numbers that are true, but that are unprovable within the system.

  ehk

  Any effectively generated theory capable of expressing elementary arithmetic cannot be both consistent and complete. In particular, for any consistent, effectively generated formal theory that proves certain basic arithmetic truths, there is an arithmetical statement that is true,[1] but not provable in the theory (Kleene 1967).

  - If such a system is also capable of proving certain basic facts about the natural numbers, then one particular arithmetic truth the system cannot prove is the consistency of the system itself.

Gödeli esimese mittetäielikkuse-teoreemi tõestus

- Gödeli originaaltõestus:

  Throughout the proof we assume a formal system is fixed and satisfies the necessary hypotheses. The proof has three essential parts.

  The first part is to show that statements can be represented by natural numbers, known as Gödel numbers, and that properties of the statements can be detected by examining their Gödel numbers. This part culminates in the construction of a formula expressing the idea that a statement is provable in the system.

  The second part of the proof is to construct a particular statement that, essentially, says that it is unprovable.

  The third part of the proof is to analyze this statement to show that it is neither provable nor disprovable in the system.

Gödeli esimese mittetäielikkuse-teoreemi tõestus

- Stephen Cole Kleene (1943) presented a proof of Gödel's incompleteness theorem using basic results of computability theory.

  One such result shows that the halting problem is unsolvable: there is no computer program that can correctly determine, given a program *P* as input, whether *P* eventually halts when run with some given input.

  Kleene showed that the existence of a complete effective theory of arithmetic with certain consistency properties would force the halting problem to be decidable, a contradiction.

Gödeli esimese mittetäielikkuse-teoreemi tõestus v2

Use the result that we cannot in general decide for a recursive function F if some number x is in the range of F, i.e. there is a set that is recursively enumerable but not recursive.

We proved the existence of such a set in the previous section and gave the example of the halting problem for computer programs.

A formal system that is strong enough to state the halting problem for all programs cannot be decidable.

There are statements of the form "program x never halts" that are true but not decidable in the system. If all such statements were formally decidable then we could decide the halting problem by enumerating all theorems. Eventually (in a finite time) one of the theorems would be that the program does halt or that it does not halt.

Järeldumine ja põhjuslikkus

- Võtame ette “ja”, “või”, “ei”, “järeldub”.
- Kõige mugavam ja põhiline on “järeldub”.

- “Järeldub” on filosoofilises mõttes umbmäärane sõna.
- **Mis tähendab “järeldub”?**
  - Kas “A-st järeldub B” tähendab, et “A põhjustab B”?
  - Aga: **F => T**, seega “Kui kuu peal on lehmi, olen mina kolm meetrit pikk”

- **Põhjuslikkus??**
  - Kivi käest lahti laskmine põhjustab tema kukkumise?
  - Aga gravitatsioon? Asjaolu, et kivi pole laual? jne
  - Liblika tiivalöök Senegalis võib põhjustada orkaani Floridas?
  - Kuidas oleks fatalistliku maailmavaatega: kõik on ette määratud, siis põhjuslikkust justkui polekski?

Esimene teema: loogikasõnade piiratud tähendused

Hierarhia tugevamast nõrgemateni:

- **Klassikaline loogika**: kõige võimsam: kõige rohkem saab järeldada
- **Intuitsionistlik loogika**: ei kehti, et “A või mitte A” on alati tõsi!
- **Relevantne loogika**: ei kehti, et “F => T” (lehmad kuu peal ja 3 m)
- **Minimaalne loogika**: nii vähe saab järeldada, kui veel mõtet on

Uurime neid väiksemast võimsamale: alt üles

Aksioomidena esitatud loogika (Hilbert)

Üks reegel (modus ponens) ja palju aksioome:
Modus ponens:
kui **a => b** ja **a**, siis **b**

Implication:

- p=>(q=>p)
- (p=>(q=>r))=>((p=>q)=>(p=>r))

And:

- (p & q)=>p
- (p & q)=>q
- p=>(q=>(p & q))

Or:

- p=>(p v q)
- q=>(p v q)
- (p=>r)=>((q=>r)=>((p v q)=>r))

Kombinaatorid

- B (assoc): ((X ->Y) -> Z) -> (X -> (Y -> Z))
- C (strong comm): ((X -> Z) ->Y) -> ((X ->Y) -> Z)
- I (identity): X -> X
- W (strong contraction): (X->Y) -> ((X->Y)->Y)
- K (weakening): (X->Y)->X
- Peirce: ((A -> B) -> A) -> A

Minimaalne loogika

Järeldusest teame, et:

- p => p
- **(p => (q =>r)) => ((p=>q) => (p=>r))**

Relevantne loogika

- Ei kehti: **a => (b => a)**

Lineaarne loogika

Standardseletus: müügiautomaat

- Sul on dollar, lähed automaadi juurde.
- Paned dollari sisse.
- Valid kas koka voi fanta
- Saad valitud asja
- Dollarit enam ei ole

Intuitsionistlik loogika

Tehnilliselt lihtne piirang klassikalise loogika järeldusreeglite süsteemile:

- Gentzeni sekventsiaalarvutuses tohib paremal pool olla vaid üks element
- Hilberti stiilis aksiomaatikas ei tohi olla teatud aksioome, nagu näiteks
  - P v –P
  - - - P -> P
  - ((P -> Q) -> P) -> P
  - (-P -> -Q) -> (Q -> P)

Konstruktivism ja intuitsionistlik loogika

- Tõe kysimus?
  - platooniline tõde on olemas (klassikaline loogika ja matemaatika)
  - platoonilist tõde ei ole (konstruktivistid) : tõesus on meie oma konstruktsioon, ise loome, ehitades tõestusi. Mh siis:

    - ei saa oelda, et suvalise P või A või B jaoks kehtivad

      P v –P

      (- - P) = P

      (((A = > B) => A) => A)

Küll aga kehtib alati A => A ning A & B => B jms.

Konstruktiivne matemaatika on laiem mõiste kui intuitsionistlik loogika.

Konstruktiivsus on mittedefineeritav.

Heytingi algebra semantika intuitsionislikule loogikale

Domeeni elementideks on **lõigud reaalarvude kiirel**.

$$\begin{aligned} \mathrm{Value}[\bot] &= \emptyset \\ \mathrm{Value}[\top] &= \mathbf{R} \\ \mathrm{Value}[A \wedge B] &= \mathrm{Value}[A] \cap \mathrm{Value}[B] \\ \mathrm{Value}[A \vee B] &= \mathrm{Value}[A] \cup \mathrm{Value}[B] \\ \mathrm{Value}[A \rightarrow B] &= \mathrm{int}\left(\mathrm{Value}[A]^{\complement} \cup \mathrm{Value}[B]\right) \end{aligned}$$

Int(..) tähistab sissepoole jäämist

[A]C tähendab täiendit (complement) ehk kõike, mis jääb väljapoole

Realiseeritavus ning tüübid

- Klassikalisel pred arvutusel on domeen ja funktsioond ning predikaatide interpretatsioonid. Intuitsionistlikul ei ole!
- Aga: T on intuitsion tõestatav => T on klassikaliselt õige

- A => A :   lambda x. x
- (A=>A) => A : lambda f . ??
- A => ((A=>B) => B) : lambda x . lambda f. f(a)
- A & B => B: lambda x. second(x)

- mkpair(1,3)   first(mkpair(1,3))=1, second(..)=3.

Curry-Howard correspondence

A proof is a program, and the formula it proves is the type for the program.

The beginnings of the **Curry–Howard correspondence** lie in several observations:

- In 1934 Curry observes that the types of the combinators could be seen as axiom-schemes for intuitionistic implicational logic.
- In 1958 he observes that a certain kind of proof system, referred to as Hilbert-style deduction systems, coincides on some fragment to the typed fragment of a standard model of computation known as combinatory logic.
- In 1969 Howard observes that another, more "high-level" proof system, referred to as natural deduction, can be directly interpreted in its intuitionistic version as a typed variant of the model of computation known as lambda calculus.

Lineaarne loogika

Idee: ressursid ei kao ega teki niisama

Ei kehti: A => A & B
Kehtib ok: B & A => A & B
Kehtib ok: A & (A=>B) => B

A ei ole sama mis A & A ei ole sama mis A & A & .... & A ...
Aga, mõned ressursid on piiramatud: tähistame neid !A

!vesi & tablett => !vesi & jook

Jätkame **https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_logic**

Lineaarse loogika reeglid 1: ressursid piiratud

Identity Rules

$$\frac{}{B \vdash B}\ \mathit{init} \qquad\qquad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma \qquad \Delta', B \vdash \Gamma'}{\Delta, \Delta' \vdash \Gamma, \Gamma'}\ \mathit{cut}$$

Negation Rules

$$\frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta, B^{\perp} \vdash \Gamma}\ (\cdot)^{\perp}\mathrm{L} \qquad\qquad \frac{\Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta \vdash B^{\perp}, \Gamma}\ (\cdot)^{\perp}\mathrm{R}$$

Multiplicative Rules

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, \mathbf{1} \vdash \Gamma}\ \mathbf{1}L \qquad\qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}}\ \mathbf{1}R$$

$$\frac{\Delta, B_1, B_2 \vdash \Gamma}{\Delta, B_1 \otimes B_2 \vdash \Gamma}\ \otimes L \qquad\qquad \frac{\Delta_1 \vdash B, \Gamma_1 \qquad \Delta_2 \vdash C, \Gamma_2}{\Delta_1, \Delta_2 \vdash B \otimes C, \Gamma_1, \Gamma_2}\ \otimes R$$

$$\frac{}{\perp \vdash}\ \perp L \qquad\qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \perp, \Gamma}\ \perp R$$

$$\frac{\Delta_1, B \vdash \Gamma_1 \quad \Delta_2, C \vdash \Gamma_2}{\Delta_1, \Delta_2, B \parr C \vdash \Gamma_1, \Gamma_2}\ \parr L \qquad\qquad \frac{\Delta \vdash B, C, \Gamma}{\Delta \vdash B \parr C, \Gamma}\ \parr R$$

Lineaarse loogika reeglid 2: ressursse piiramatult

Additive Rules

$$\frac{}{\Delta, \mathbf{0} \vdash \Gamma}\ \mathbf{0}L \qquad \frac{}{\Delta \vdash \top, \Gamma}\ \top R$$

$$\frac{\Delta, B_i \vdash \Gamma}{\Delta, B_1 \,\&\, B_2 \vdash \Gamma}\ \&L\ (i = 1, 2) \qquad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma \quad \Delta \vdash C, \Gamma}{\Delta \vdash B \,\&\, C, \Gamma}\ \&R$$

$$\frac{\Delta, B \vdash \Gamma \quad \Delta, C \vdash \Gamma}{\Delta, B \oplus C \vdash \Gamma}\ \oplus L \qquad \frac{\Delta \vdash B_i, \Gamma}{\Delta \vdash B_1 \oplus B_2, \Gamma}\ \oplus R\ (i = 1, 2)$$

Quantifier Rules

$$\frac{\Delta, B[t/x] \vdash \Gamma}{\Delta, \forall x.B \vdash \Gamma}\ \forall L \qquad \frac{\Delta \vdash B[y/x], \Gamma}{\Delta \vdash \forall x.B, \Gamma}\ \forall R$$

$$\frac{\Delta \vdash B[t/x], \Gamma}{\Delta \vdash \exists x.B\Gamma}\ \exists R \qquad \frac{\Delta, B[y/x] \vdash \Gamma}{\Delta, \exists x.B \vdash \Gamma}\ \exists L$$

Exponential Rules

$$\frac{!\Delta, B \vdash ?\Gamma}{!\Delta, ?B \vdash ?\Gamma}\ ?L \qquad \frac{!\Delta \vdash B, ?\Gamma}{!\Delta \vdash !B, ?\Gamma}\ !R$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, !B \vdash \Gamma}\ !W \qquad \frac{\Delta, !B, !B \vdash \Gamma}{\Delta, !B \vdash \Gamma}\ !C \qquad \frac{\Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, !B \vdash \Gamma}\ !D$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash ?B, \Gamma}\ ?W \qquad \frac{\Delta \vdash ?B, ?B, \Gamma}{\Delta \vdash ?B, \Gamma}\ ?C \qquad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash ?B, \Gamma}\ ?D$$

Monotoonsus

Kõik harilikud loogikad on nn ***monotoonsed***:

Kui D => G, siis ka A & D => G

Default loogika ja episteemiline loogika on ***mittemonotoonsed***

Default loogika reegli standardnäide:

Lind(x) : ei saa järeldada (-Lennuvõimeline(X))

Lennuvõimeline(X)

Episteemiline loogika

Uskumise loogika ja teadmiste loogika

Saab öelda asju a la P(12, “eksisteerib y . C(y)”)

Uskumised näiteks

- usub(jaan,”george bush on usa president”)
- usub(jaan,”arnold ryytel on eesti president”)

Teadmised näiteks (mis on vahe uskumisega?):

- teab(jaan,”george bush on usa president”)
- -teab(jaan,”arnold ryytel on eesti president”)

Tüüpiliselt tähendab „teab(x,y)“ et „usub(x,y) ja y“.